第７講　小道具の使い方

24　実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0, 0)，A(0, 1)，B(1, 0)，C(t, 0) を考える．また線分 AB 上の点 D を $\angle \mathrm{ACO}=\angle \mathrm{BCD}$ となるように定める．

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25　l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の3条件(i)，(ii)，(iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える．

(i)　円 C_1，C_2 は2つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する．

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ．

《15 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27　座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす.

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ.

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　小道具の使い方

24 実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 O(0，0)，A(0，1)，B(1，0)，C(t，0) を考える．また線分 AB 上の点 D を ∠ACO＝∠BCD となるように定める．

t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ．

《12 東大・文科》

【答】 最大値 $3-2\sqrt{2}$　$(t=\sqrt{2}-1)$

【解説】 AC の傾きは $-\dfrac{1}{t}$ なので，直線 AC の式は $y=-\dfrac{1}{t}x+1$ となり，直線 AC と x 軸に関して対称なものが直線 CD なので，その式は $-y=-\dfrac{1}{t}x+1$ つまり $y=\dfrac{1}{t}x-1$ となる．

これと直線 AB の式 $x+y=1$ を連立することで $\mathrm{D}\left(\dfrac{2t}{1+t},\ \dfrac{1-t}{1+t}\right)$ を得る．

三角形 ACD の面積は，三角形 OAC の面積と三角形 BCD の面積の和を三角形 OAB の面積から引いたものだから，三角形 ACD の面積は

$$\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{2}\times t\times 1+\frac{1}{2}\times(1-t)\times\frac{1-t}{1+t}\right\}=\frac{t(1-t)}{1+t}$$
$$=3-\left(1+t+\frac{2}{1+t}\right)$$

となる．

ここで $1+t>0$，$\dfrac{2}{1+t}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$1+t+\frac{2}{1+t}\geqq 2\sqrt{(1+t)\cdot\frac{2}{1+t}}=2\sqrt{2}$$

が成り立つ．等号成立は $1+t=\dfrac{2}{1+t}$ のときで，$0<t<1$ を満たすものは $t=\sqrt{2}-1$．

よって三角形 ACD の面積の最大値は $\boldsymbol{3-2\sqrt{2}}$　$\boldsymbol{(t=\sqrt{2}-1)}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25　l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする．さらに，以下の 3 条件(i)，(ii)，(iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える．

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる．

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する．

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する．

円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする．$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ．

《15 東大・文科》

【答】　l は $y=\frac{4}{3}x$，最小値は 7

【解説】　円外の 1 点から円に引いた 2 本の接線の長さは等しいので，C_2 は y 軸と $(0,\ 1)$ で接することになる．

ここで θ_1 と θ_2 を 0 より大きく $\frac{\pi}{4}$ 未満の角として，$\tan\theta_1=r_1$，$\tan\theta_2=r_2$ を満たすものとすると，$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$ より

$$r_2=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta_1\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta_1}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta_1}=\frac{1-r_1}{1+r_1}$$ となる．

このとき

$$8r_1+9r_2=8r_1+9\times\frac{1-r_1}{1+r_1}=8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}-17$$

であるが，$8(r_1+1)>0$，$\frac{18}{r_1+1}>0$ より相加平均と相乗平均の関係を用いて

$$8(r_1+1)+\frac{18}{r_1+1}\geqq 2\sqrt{8(r_1+1)\cdot\frac{18}{r_1+1}}=24$$

が成立する．等号は $8(r_1+1)=\frac{18}{r_1+1}$ のとき，つまり $r_1=\frac{1}{2}$ のときに成り立つ．（これは $0<r_1<1$ をみたす．）

よって，求める最小値は $24-17=\mathbf{7}$ で，そのときの直線の傾きは $\tan 2\theta_1=\frac{2r_1}{1-r_1{}^2}=\frac{4}{3}$ より，直線 l は $\boldsymbol{y=\frac{4}{3}x}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 以下の命題A，Bそれぞれに対し，その真偽を述べよ．また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ．

命題A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ．

命題B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ をみたすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ．

《15 東大・文科》

【答】 (1) 偽，反例は $n=17$　(2) 真

【解説】 (1) $\boldsymbol{n=17}$ とすると $\dfrac{17^3}{26}+100-17^2=-\dfrac{1}{26}<0$ より，**偽**.

(2) $5n+5m+3l=1 \iff 3l=1-5n-5m$ より

$$\begin{aligned}10nm+3ml+3nl&=10nm+3l(n+m)\\&=10nm+(1-5n-5m)(n+m)\\&=-5n^2-5m^2+n+m\\&=n(1-5n)+m(1-5m)\end{aligned}$$

である．ここで n は整数より，$n\neq0$ のとき n，$1-5n$ は異符号となるので，$n(1-5n)<0$. また $n=0$ のとき $n(1-5n)=0$ である．

同様に，$m=0$ のとき $m(1-5m)=0$ であり，$m\neq0$ のとき $m(1-5m)<0$ となる．

ここで $n=m=0$ とすると $5n+5m+3l=1$ を満たす整数 l が存在しないことになるので，n と m は同時に 0 になることはない．

よって $n(1-5n)+m(1-5m)<0$ となる．

したがって，命題Bは**真**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

27 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす.

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ.

《12 東大・文科》

【答】 最大値 $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$　$\left(y=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}\right)$

【解説】 与式を y の 2 次方程式とみた

$$3y^2+(4x+5)y+2x^2+4x-4=0 \quad \cdots①$$

が実数解をもつので,

$$(4x+5)^2-4\cdot3\cdot(2x^2+4x-4)\geqq0 \iff 8x^2+8x-73\leqq0$$

$$\therefore\quad \frac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\frac{-2+5\sqrt{6}}{4}$$

である．ここで $x=\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ のとき①より $y=-\dfrac{1}{6}(4x+5)=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}$

よって求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}}$　$\boldsymbol{\left(y=-\dfrac{3+5\sqrt{6}}{6}\right)}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。